Опште теореме и велики закони конзервације Њутнове механике

Теорема импулса

За систем од N честица, запишимо основни динамички закон Њ. механике у инерцијалном систему на тај начин што ћемо активне силе и реакције на спољашње и унутрашње:

$$m_\alpha \vec{a}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\,ext} + \vec{R}_\alpha^{\,ext} + \vec{F}_\alpha^{\,int} + \vec{R}_\alpha^{\,int} \quad (\alpha = 1, 2, \dots N)$$

Саберемо све ј-не (узимајући у обзир да су суме свих унутрашњих активних сила и унутрашњих реакција једнаке нули јер у Њ. м. важи закон акције и реакције)

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{F}_\alpha^{\,ext} + \sum_{\alpha=1}^{N} R_\alpha^{ext}$$

Пошто је

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{p}_\alpha = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

то је:

$$\boxed{\frac{d\vec P}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec F_\alpha^{ext} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec R_\alpha^{ext} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec K_\alpha^{ext} = \vec K^{ext}}$$

Ово је теорема импулса (у инерцијалном систему референције брзина промене укупног импулса система са временом једнака је резултанти свих спољашњих активних сила и свих спољашњих реакција).

Пошто је $\vec P = m\dot{\vec r}_c$ теорема импулса се може написати и у облику:

$$\boxed{m\ddot{\vec r}_c = \vec K^{ext}}$$ - теорема центра маса

(у инерцијалним системима се центар маса креће по истим законима као честица чија је маса једнака укупној маси система и која је подвргнута дејству свих спољашњих активних сила и свих спољашњих реакција)

Из ј-не $\frac{d\vec P}{dt} = \vec K^{ext}$ се за два стања механичког система у t_1 и t_2 може добити

$$\vec P_2 - \vec P_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec K^{ext}\, dt .$$

То нам омогућује да на основу познавања почетног и крајњег стања система можемо просуђивати о спољашњим силама иако је непознат процес еволуције стања система од почетног до крајњег.

Интеграл импулса. Закон конзервације импулса

Може се догодити да при кретању система у инерцијалном систему референције резултанта $\vec K^{ext}$ буде таква да је њена пројекција на неки фиксни правац $\vec n$ једнака нули у сваком тренутку времена ($\vec n \cdot \vec K^{ext} = 0$) тј. $\vec K^{ext}$ стално лежи у равни нормалној на $\vec n$. Тако је:

$$\vec n \cdot \frac{d\vec P}{dt} = \vec n \cdot \vec K^{ext} = 0$$

Пошто је $\vec n$ константан вектор то је

$$\vec n \cdot \frac{d\vec P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec n \cdot \vec P) = 0$$ тј.

$$\boxed{\vec n \cdot \vec P = C} \qquad C = const.$$

Ако је у неком и. систему референције резултанта свих спољашњих интеракција које делују на честице система стално нормална на неки фиксни правац онда се пројекција импулса тог система на свој правац не мења у току времена. То [illegible] интеграл кретања

Може се догодити да је $\vec{K}^{ext}$ ортогонална на два правца (непаралелна) $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Тада су интеграли кретања $\vec{n}_1\cdot\vec{P}$ и $\vec{n}_2\cdot\vec{P}$ али и пројекције импулса система на било који правац у равни $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$. Таквих праваца има бесконачно много али су само два независна.

Може се догодити да је $\vec{K}^{ext}$ ортогонално на три некомпланарна вектора $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_3$. То је могуће само ако је $\vec{K}^{ext}=0$. Тада су три независна интеграла кретања $\vec{n}_1\cdot\vec{P}$, $\vec{n}_2\cdot\vec{P}$, $\vec{n}_3\cdot\vec{P}$ тј. $\vec{P}$ је константан вектор.

Тада важи закон конзервације импулса, што има за последицу да се центар маса система код кога важи закон конзервације импулса, у инерцијалном систему референце креће униформно тј. систем центра маса је инерцијалан. Таква ситуација је код изолованих система. Отуда је згодно за разматрање изоловане системе анализирати у систему центра маса. Унутрашње силе тада могу да утичу да се мењају релативне брзине међу честицама али су те промене такве да укупни импулс система остаје константан и по интензитету и по правцу. Ова константна вредност импулса система одређена је почетним условима кретања честица система. Нпр. сунчев систем се може са одређеним степеном тачности третирати као затворен систем и код њега силе интеракције међу телима не утичу на равномерно и праволинијско кретање ц.м. сунчевог система, иако се сва тела која улазе у сунчев систем крећу убрзано.

У случају неизолованих система, унутрашње силе у општем случају утичу на промену импулса и убрзање центра маса јер сума спољашњих сила зависи од положаја или брзина честица система. Наиме $\vec{K}^{ext}$ (резултанта свих спољашњих активних сила и свих сила реакција) у општем случају је ф-ја положаја и брзина честица које се са друге стране могу мењати под деловањем унутрашњих сила.

Закон конзервације имп. важи и код затворених система за које не важе Њутнове jне (пример кретања система наел. честица, тј. су унутрашње силе електромагнетне; јавља се и зрачење које такође носи импулс тако да изоловано разматрано импулс честица није константан али је сумарни импулс честица и зрачења константан тј. овде под затвореним системом треба третирати честице и поље зрачења.

У савременој физици (због тога што 3. зак. и реакц. не важи увек) важи закон одржања суме импулса честица и њиховог поља

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt}=\vec{F}_\alpha \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \vec{p}_\alpha+\int_V \vec{g}\,dV\right)=0$$

где је $\vec{g}$ запреминска густина импулса поља.

Теорема момента импулса

Једначину

$$m_\alpha \vec{a}_\alpha = \vec{F}^{ext}_\alpha + \vec{R}^{ext}_\alpha + \vec{F}^{int}_\alpha + \vec{R}^{int}_\alpha = \vec{K}^{ext}_\alpha + \vec{K}^{int}_\alpha$$

помножимо векторски са кореспондентним вектором положаја и добијене једначине саберимо. При томе суме са $\vec{K}^{int}_\alpha$ су једнаке нули уколико важи закон акције и реакције и уколико су унутрашње активне силе и унутрашње реакције централне. Доказаћемо ово:

Централне интеракције - колинеарне су са вектором релативног положаја

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}\frac{\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{K}^{int}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \Big(\sum_{\beta=1}^{N} \vec{K}^{int}_{\alpha\beta}\Big) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{K}^{int}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{K}^{int}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_\beta \times \vec{K}^{int}_{\beta\alpha}$$

Ако у систему важи закон акције и реакције то је $\vec{K}_{\alpha\beta} = -\vec{K}_{\beta\alpha}$ па је даље:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{K}^{int}_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{K}^{int}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \vec{r}_\beta \times \vec{K}^{int}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{K}^{int}_{\alpha\beta}$$

Сума $\sum_{\alpha,\beta=1}^{N} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times \vec{K}_{\alpha\beta}$ биће једнака нули ако су унутрашње интеракције централне тј. ако су облика $\vec{K}^{int}_{\alpha\beta} = K^{int}_{\alpha\beta}\frac{\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|}$ [тада је $(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \times (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) = 0$].

магнетне силе нису такве

Након тога се добија:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{a}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}^{ext}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{R}^{ext}_\alpha$$

Пошто је укупни момент импулса система:

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{l}_\alpha = \sum_{\alpha=1} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha$$

то је $\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{a}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha$.

Водећи рачуна о томе да је

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha = \cancelto{0}{\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{v}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{v}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{a}_\alpha$$

тако да се добија:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}^{ext}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{r}_\alpha \times \vec{R}^{ext}_\alpha = \vec{M}^{ext}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}}$$ – теорема момента импулса

По овој теореми је брзина промене укупног момента импулса система у инерцијалним системима референције једнака резултујућем моменту свих спољашњих активних сила и свих спољашњих реакција.

Интеграл момента импулса. Закон конзервације момента импулса

Ако је укупни момент спољашњих активних сила и реакција $\vec{M}^{ext}$ увек ортогоналан на фиксну праву $\vec{n}$ онда је $\vec{n}\cdot\vec{M}^{ext}$ један интеграл момента импулса. Величине $\vec{n}_1\cdot\vec{M}^{ext}$ и $\vec{n}_2\cdot\vec{M}^{ext}$ биће два независна интеграла момента импулса уколико је $\vec{M}^{ext}$ ортогонално на неколинеарне фиксне праве $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Ако је $\vec{M}^{ext}=0$ постојаће три независна интеграла момента импулса тј. важиће <u>закон конзервације момента импулса система</u>. Овај закон свакако важи у изолованим системима честица јер је тада $\vec{M}^{ext}=0$ а и $\vec{F}_\alpha^{ext}=0$ $\vec{R}_\alpha^{ext}=0$.

Приметимо да у случају момента импулса број интеграла момента импулса може бити 0, 1 или 3. Покажимо ово на случају једночестичног система:

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r}\times\vec{K}^{ext} = \vec{r}\times\vec{K}$$

Помножимо скаларно са $\vec{r}$ тако да је

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{K})=0$$

односно

$$x\frac{dl_x}{dt}+y\frac{dl_y}{dt}+z\frac{dl_z}{dt}=0$$

Према томе ако постоје два интеграла момента импулса (нпр. $\frac{dl_x}{dt}=0$ и $\frac{dl_y}{dt}=0$) мора постојати и трећи интеграл момента импулса (тада мора да је $\frac{dl_z}{dt}=0$)

Закон конзервације момента импулса указује и на то да се момент импулса не може мењати под утицајем унутрашњих сила, пошто се оне повинују закону акције и реакције и ако су централне.

Теорема кинетичке енергије. Теорема механичке енергије

Промена кинетичке енергије са временом је:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha v_\alpha^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha\cdot\vec{v}_\alpha\right) = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha\cdot\vec{v}_\alpha .$$

Пошто је $m_\alpha\vec{a}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{R}_\alpha$ то је даље:

$$\boxed{\frac{dT}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha\cdot\vec{v}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{R}_\alpha\cdot\vec{v}_\alpha}$$

- <u>Теорема кинетичке енергије</u> - брзина промене укупне кинетичке енергије система честица са временом у инерцијалном систему референце једнака је укупној снази свих активних сила и свих реакција. (У овом случају се у сумама не појаву унутрашње акт. силе и унутрашње реакције).

Уколико активне силе разложимо на потенцијалне и непотенцијалне горња ј-на постаје

$$\frac{dT}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{pot}\cdot\vec{v}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{nep}\cdot\vec{v}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{R}_\alpha\cdot\vec{v}_\alpha$$

Како је код потенцијалних компоненти $\left(\vec{F}_\alpha^{pot}=-\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_\alpha}\right)$

$$dA=-dU+\frac{\partial U}{\partial t}dt$$

то је

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+U)=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{nep}\cdot\vec{v}_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{R}_\alpha\cdot\vec{v}_\alpha}$$

- <u>Теорема механичке енергије система</u>

Сума кинетичке и потенцијалне енергије система је <u>механичка енергија система</u>. Ова теорема тврди да је брзина промене механичке енергије система у инерцијалном систему референце једнака збиру снага свих непотенцијалних сила које делују на систем и свих реакција веза и парцијалног извода потенцијалне енергије система по времену.

Уколико се реакције разложимо на идеалне и неидеалне, уз вођење рачуна да је $R_\alpha^{id}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_\alpha}$ добије је

$$\frac{d}{dt}(T+U)=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{nep}\cdot\vec{v}_\alpha+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_\alpha}\cdot\vec{v}_\alpha\right)+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{R}_\alpha^{neid}\cdot\vec{v}_\alpha$$

Пошто се диференцирањем холономних и задржавајућих веза по времену добија

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_\alpha}\cdot\vec{v}_\alpha+\frac{\partial f_j}{\partial t}=0$$

то је даље:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(T+U)=\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha^{nep}\cdot\vec{v}_\alpha-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{N}\vec{R}_\alpha^{neid}\cdot\vec{v}_\alpha}$$

<u>Теорема механичке енергије за холономни систем честица у инерцијалном систему референце</u>

Закон конзервације механичке енергије

Интеграл механичке енергије (важи закон одржања механичке енергије) ако при кретању система његова механичка енергија остаје константна.

Код холономних система у инерцијалном систему референције интеграл механичке енергије ће постојати ако су потенцијалне активне силе конзервативне (U не зависи експлицитно од t), уколико непотенцијалне силе имају снагу једнаку нули а везе су идеалне и стационарне.

Такви системи су конзервативни

Треба рећи да су закони конзервације повезани са особинама простора и времена. Конзервација импулса је у вези са хомогеношћу простора (механичка својства изолованог система не мењају се при паралелном померању система као целине). Конзервација момента импулса повезана је са изотропношћу простора (механичка својства изолованог система не мењају се при произвољној ротацији система као целине). Конзервација мех. енергије повезана је са хомогеношћу времена (мех. својства изолованог система не мењају се при произвољном „померању" система у времену)

Динамика холономних система. Векторски метод.

Примењујемо векторски метод - оперише се директно са векторима у обичном тродимензионалном простору.

Диференцијалне ј-не кретања система слободних система у ин. систему референције

Диференцијалне ј-не за Декартове координате

• Разматраћемо слободне честице. У инерцијалном систему референције (уз $\vec{R}_\alpha = 0$) је за систем од N честица

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = F_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots N)$$

Пројектовањем на осе Декартовог система добија се

$$\boxed{\begin{aligned} m_\alpha \ddot{x}_\alpha &= F_{\alpha x}(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \\ m_\alpha \ddot{y}_\alpha &= F_{\alpha y}(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \\ m_\alpha \ddot{z}_\alpha &= F_{\alpha z}(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \end{aligned}}$$

Ако су пројекције сила познате ове ј-не образују затворен систем диф. ј-на (онолико ј-на колико и непознатих ф-ја) па се могу наћи коначне ј-не $x_\alpha(t), y_\alpha(t), z_\alpha(t)$.

Овај систем од 3N диференцијалних ј-на другог реда еквивалентан је једној диференцијалној ј-ни реда 6N. То значи да ће се у решењу појавити 6N интеграционих константи.

$$\boxed{\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(t, C_1, \dots C_{6N}) \\ y_\alpha &= y_\alpha(t, C_1, \dots C_{6N}) \\ z_\alpha &= z_\alpha(t, C_1, \dots C_{6N}) \end{aligned}}$$

За одређивање интеграционих константи је потребно познавање 6N услова који задовољавају горње ј-не. То значи да треба знати кинематичко стање система у једном тренутку времена (<u>почетни тренутак</u>) а скуп тих података $(x_i^0, y_i^0, z_i^0, \dot{x}_i^0, \dot{y}_i^0, \dot{z}_i^0)$ представља <u>почетне услове</u>. Када се одреде на основу ових услова интеграционе константе и када се уврсте у горње ј-не добијају се коначне једначине система из задатог кинематичког стања $(x_i^0, y_i^0, z_i^0, \dot{x}_i^0, \dot{y}_i^0, \dot{z}_i^0)$

Приметимо да су диференцијалне ј-не кретања већ решене по најстаријим (другим) изводима. То значи да систем има једнозначно решење за сваки скуп почетних услова за који су дефинисане ф-је које изражавају ове најстарије изводе у зависности од извода нижих редова и независно променљиве. У нашем случају то значи да ће 6N интеграционих константи бити једнозначно одређене за свако могуће почетно кинематичко стање. То значи да је свако кинематичко стање одређено кинематичким стањем у једном тренутку времена, што се односи како на стања у прошлости, тако и на стања у будућности. Овде се, јасно, претпоставља да у целом временском интервалу делују исте силе. Према томе, ако знамо све силе које дејствују на честице система и ако знамо почетне услове диференцијалне једначине кретања потпуно и једнозначно одређују положаје и брзине свих честица у ма ком другом тренутку. Ово је <u>принцип класичне каузалности</u>

Овде треба напоменути да је основни динамички закон инваријантан у односу на инверзију у времену $\Delta t' = -\Delta t$. У најпростијем случају сила која зависи само од растојања је инваријантна на инверзију у времену (што доказују подробне анализе свих механичких сила)

Убрзање је такође инваријантно при инверзији времена.

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt'^2} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{-dt}\left(\frac{d\vec{r}}{-dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Тако је при инверзији времена

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad m'\ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'$$ а пошто је $m' = m$, $\ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}}$

то је и $\vec{F}' = \vec{F}$. Приметимо да се при инверзији времена смер брзине мења тј $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt'} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v}$.

Последице изнетог су следеће: ако постоји неко кретање које одговара правом (природном) протицању времена, то је могуће и инверзно кретање („кретање уназад"). При инверзном кретању систем пролази кроз све положаје у простору и добија брзине супротног смера у инверзном режиму. Ово је такође одраз класичне каузалности.

У многим случајевима није неопходно налажење коначних ј-на кретања већ је потребно познавање <u>интеграла кретања</u>. Ако коначне ј-не продиференцирамо по t добијамо:

$$\dot{x}_\alpha = \dot{x}_\alpha(t, C_1, \dots C_{6N})$$
$$\dot{y}_\alpha = \dot{y}_\alpha(t, C_1, \dots C_{6N})$$
$$\dot{z}_\alpha = \dot{z}_\alpha(t, C_1, \dots C_{6N})$$

Систем од $6N$ ј-на за $x_\alpha(t), y_\alpha(t), z_\alpha(t), \dot{x}_\alpha(t), \dot{y}_\alpha(t)$ и $\dot{z}_\alpha(t)$ може се експлицитно решити по интеграционим константама чиме се добија скуп од $6N$ ф-ја кинематичких променљивих система и времена. Ове ф-је имају особину да су константне у току времена

$$\boxed{C_s = F_s(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t)} \qquad s = 1, 2, \dots 6N$$

Ово су интеграли кретања (математички то су први интеграли кретања - релације које се добијају као последице полазног система диф. ј-на и које садрже произвољне константе и изводе нижег реда у односу на полазне ј-не - то су диф. ј-не нижег реда које се јављају као међукорак при реш. задатог сист. ј-на)

Ових интеграла има бесконачно много јер је и $\Phi(F_1, \dots F_{6N})$ такође константа у току времена али је само $6N$ независних. Познавање ових $6N$ интеграла омогућује нам да не морамо да решавамо диф. ј-не кретања јер се релевантне по кинематичким променљивим $x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ добијају из њих потпуне информације. Зато су од интереса интеграли кретања са физичким смислом (нпр. енергије, момента импулса или импулса). Познавање интеграла кретања омогућује да се ред система диф. ј-на смањи за 1, чиме се упрошћава његова интеграција.

Диференцијалне једначине за генералисане координате

Једночестични системи

Из јне $m\ddot{\vec r}=\vec F$ наћи ћемо скаларне јне за генералисане координате (множењем са $\vec e_{q_\sigma}=\frac{1}{h_\sigma}\frac{\partial \vec r}{\partial q_\sigma}$):

$$m\ddot{\vec r}\cdot\vec e_{q_\sigma}=\vec F\cdot\vec e_{q_\sigma}=\frac{1}{h_\sigma}\left(\vec F\cdot\frac{\partial\vec r}{\partial q_\sigma}\right)$$

Пошто је $\vec a\cdot\vec e_{q_\sigma}=\frac{1}{h_\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot q_\sigma}\right)-\frac{\partial T^*}{\partial q_\sigma}\right]$ то је даље:

$$\frac{m}{h_\sigma}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\dot q_\sigma}\right)-\frac{\partial T^*}{\partial q_\sigma}\right]=\frac{1}{h_\sigma}\left(\vec F\cdot\frac{\partial\vec r}{\partial q_\sigma}\right)\quad /\cdot h_\sigma$$

и уношењем m под оператор диф.

уз $mT^*=T$ и $\Gamma_\sigma=\vec F\cdot\frac{\partial\vec r}{\partial q_\sigma}$ (генералисане силе)

добија се

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}=\Gamma_\sigma}$$

- зову их још и Лагранжеве јне

Проанализираћемо ове јне. Приметимо да је брзина у генералисаним координатама

$$\vec v=\frac{\partial\vec r}{\partial q_1}\dot q_1+\frac{\partial\vec r}{\partial q_2}\dot q_2+\frac{\partial\vec r}{\partial q_3}\dot q_3=\sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial\vec r}{\partial q_\mu}\dot q_\mu$$

Након тога је израз за кинетичку енергију

$$T=\frac12 m\vec v^2=\frac12 m\left(\sum_{\mu=1}^{3}\frac{\partial\vec r}{\partial q_\mu}\dot q_\mu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial\vec r}{\partial q_\nu}\dot q_\nu\right)=\frac12\sum_{\mu,\nu=1}^{3}A_{\mu\nu}\dot q_\mu\dot q_\nu$$

где је $A_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}(q_i)=m\frac{\partial\vec r}{\partial q_\mu}\frac{\partial\vec r}{\partial q_\nu}$ $(\mu,\nu=1,2,3)$

Потражимо варијациони извод T (водећи рачуна да $A_{\mu\nu}$ не зависи од генералисаних брзина)

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q_\sigma}=\frac12\sum_{\mu,\nu=1}^{3}A_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\dot q_\sigma}\left(\dot q_\mu\dot q_\nu\right)=\frac12\sum_{\mu,\nu=1}^{3}A_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\dot q_\mu}{\partial\dot q_\sigma}\dot q_\nu+\dot q_\mu\frac{\partial\dot q_\nu}{\partial\dot q_\sigma}\right)=$$

$$=\frac12\sum_{\mu,\nu=1}^{3}A_{\mu\nu}\left(\delta_{\mu\sigma}\dot q_\nu+\delta_{\nu\sigma}\dot q_\mu\right)=\frac12\sum_{\nu=1}^{3}A_{\sigma\nu}\dot q_\nu+\frac12\sum_{\mu=1}^{3}A_{\mu\sigma}\dot q_\mu$$

Означимо сумациони индекс истим словом $\nu=\mu$ и уз $A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}$ добија се:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q_\sigma}=\sum_{\nu=1}^{3}A_{\sigma\nu}\dot q_\nu$$

Даље је:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}_\sigma}\right) = \sum_{\nu=1}^{3} A_{\sigma\nu}\ddot{\gamma}_\nu + \sum_{\nu=1}^{3}\frac{dA_{\sigma\nu}}{dt}\dot{\gamma}_\nu = \sum_{\nu=1}^{3} A_{\sigma\nu}\ddot{\gamma}_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{3}\frac{\partial A_{\sigma\nu}}{\partial \gamma_\mu}\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu$$

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma_\sigma} = \frac{\partial}{\partial \gamma_\sigma}\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{3} A_{\mu\nu}\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{3}\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \gamma_\sigma}\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu$$

Након тога је диф.ј-на кретања у генерал. к.

$$\sum_{\nu=1}^{3} A_{\sigma\nu}\ddot{\gamma}_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{3}\frac{\partial A_{\sigma\nu}}{\partial \gamma_\mu}\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu - \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{3}\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \gamma_\sigma}\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu = \Gamma_\sigma(\gamma_i,\dot{\gamma}_i,t)$$

Односно:

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{3} A_{\sigma\nu}\ddot{\gamma}_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial A_{\sigma\nu}}{\partial \gamma_\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \gamma_\sigma}\right)\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu = \Gamma_\sigma(\gamma_i,\dot{\gamma}_i,t)}$$

Одавде се види да су диф. ј-не кретања у генерал. координатама другог реда по $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ и $\gamma_3(t)$. Оне су и линеарне по другим изводима и могу се по њима експлицитно решити. $\Rightarrow$

$$\sum_{\nu=1}^{3} A_{\sigma\nu}\ddot{\gamma}_\nu = \Gamma_\sigma(\gamma_i,\dot{\gamma}_i,t) - \sum_{\mu,\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial A_{\sigma\nu}}{\partial \gamma_\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial \gamma_\sigma}\right)\dot{\gamma}_\mu\dot{\gamma}_\nu = \phi_\sigma(\gamma_i,\dot{\gamma}_i,t)$$

Одавде се види да је $\ddot{\gamma}_\nu$ могуће добити са дељењем детерминанте $A_{\sigma\nu}$.

Пошто је $\det(A_{\mu\nu}) = m^3 J^2$ (J је Јакобијан прелаза из Декартових у генерал. координате) и уз чињеницу да J није идентички једнак нули $\Rightarrow \det(A_{\mu\nu}) \neq 0$.

Ово значи да се преласком на генералисане координате не нарушава принцип класичне каузалности.

Вишечестични системи

Уместо $3N$ Декартових уводи се $3N$ генералисаних. Сваку од ј-на $m_\alpha \vec{a}_\alpha = \vec{F}_\alpha$ помножимо скаларно са $\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\sigma}$

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{N}\vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\sigma}$$

Искористимо ј-не:

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_{3N})$$

$$\vec{v}_\alpha = \sum_{\nu=1}^{3N}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\nu}\dot{\gamma}_\nu$$

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{\gamma}_\nu} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\nu}$$

Кинетичка енергија честица овог система је:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha^{\,2}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \sum_{\mu,\nu=1}^{3N}\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\nu}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\mu}\,\dot\gamma_\nu\dot\gamma_\mu=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{3N}A_{\mu\nu}\,\dot\gamma_\mu\dot\gamma_\nu$$

где је

$$A_{\mu\nu}=A_{\mu\nu}(\gamma_i)=\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\mu}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_\nu}$$

$A_{\mu\nu}$ зависе од свих генералисаних координата и $A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}$. И овде је кин. енергија хомогена квадратна ф-ја генералисаних брзина.

Трансформишимо полазну ј-ну на следећи начин

$$\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{a}_\alpha\cdot\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_b}=\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \underbrace{\frac{d\vec{v}_\alpha}{dt}}_{=\vec{a}_\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_b}=\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_\alpha\cdot\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_b}\right)-\vec{v}_\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_b}\right)\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha\cdot\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot\gamma_b}-\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \vec{v}_\alpha\cdot\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \gamma_b}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_b}=\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot\gamma_b} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial \gamma_b}\right)=\frac{\partial}{\partial \gamma_b}\frac{d\vec{r}_\alpha}{dt}=\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \gamma_b}$$

Водили смо рачуна о томе да оператори $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial \gamma_b}$ комутирају. Задња релација је управо варијациони извод кинетичке енергије тако да је:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\gamma_b}\right)-\frac{\partial T}{\partial \gamma_b}=\Gamma_b} \qquad (b=1,2,\dots 3N)$$

Лагранжеве ј-не система

Ситуација је аналогна као код једне честице само је број једначина већи (3N уместо 3).

И у овом случају су диф. ј-не кретања система ј-не другог реда које су линеарне по другим изводима и могу се експлицитно решити по убрзањима тако да се и овде при преласку на генералисане координате не нарушава принцип класичне каузалности.

Показаћемо и овде да је $\det(A_{\mu\nu})\neq 0$. Пођимо при доказивању од супротне претпоставке: $\det(A_{\mu\nu})=0$. У том случају систем линеарних и хомогених алгеб. ј-на

$$\sum_{\nu=1}^{3N} A_{\mu\nu}X_\nu=0 \qquad (\nu=1,2\dots 3N)$$

има нетривијална решења по X_b. Нека је $X_1^*,\dots X_{3N}^*$ такав скуп решења

$$\sum_{\nu=1}^{3N} A_{\mu\nu}X_\nu^*=0 \qquad (\mu=1,2,\dots 3N)$$

Помножимо ове ј-не са X_μ^* и Σ.

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3N} A_{\mu\nu} X_\mu^* X_\nu^* = 0$$

Пошто је $A_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\nu}$ даље је

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3N} A_{\mu\nu} X_\mu^* X_\nu^* = \sum_{\mu,\nu=1}^{3N} \left(\sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\nu} \right) X_\mu^* X_\nu^* = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left[\sum_{\mu,\nu=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\mu} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\nu} X_\mu^* X_\nu^* \right] =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha \left(\sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\mu} X_\mu^* \right)^2 = 0$$

Пошто су $m_\alpha > 0$ и ради се о суми ненегативних чланова (квадрати) горњи израз је $=0$ само ако је сваки члан понаособ $=0$. $\Rightarrow$

$$\sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_\mu} X_\mu^* = 0$$

Или у скаларној форми

$$\sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_\mu} X_\mu^* = 0 \ , \quad \sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial y_\alpha}{\partial q_\mu} X_\mu^* = 0 \ , \quad \sum_{\mu=1}^{3N} \frac{\partial z_\alpha}{\partial q_\mu} X_\mu^* = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots N)$$

Овај систем од $3N$ алгебарских линеарних хомогених јна је идентички задовољен при чему су $X_\mu^* \neq 0$. То значи да детерминанта овог система мора бити једнака нули. Детерминанта овог система је јако бијан прелаза са Декартових на генералисане координате који је $\neq 0$ па полазна претпоставка да је $\det(A_{\mu\nu}) = 0$ није тачна. Дакле $\det(A_{\mu\nu}) \neq 0$.

Кретање холономних система честица у инерцијалном систему референце

Посматрамо систем од N честица чије је кретање ограничено са k холономних и задржавајућих веза. И овде се диференцијалне једначине кретања у генералисаним координатама добијају из једначине $m_\alpha \vec{a}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{R}_\alpha$ које се пројекцију на осе Декартовог коор. система или изнозе са $\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_b}$ и просумирају по свим честицама. Реакције веза ћемо разложити на идеалне и неидеалне компоненте.

Пројектовањем на осе Декартовог координатног система добија се:

$$\left\{\begin{aligned} m_\alpha \ddot{x}_\alpha &= F_{\alpha x} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha} + \left(\vec{R}_\alpha^{\,neid}\right)_x \\ m_\alpha \ddot{y}_\alpha &= F_{\alpha y} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_\alpha} + \left(\vec{R}_\alpha^{\,neid}\right)_y \\ m_\alpha \ddot{z}_\alpha &= F_{\alpha z} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_\alpha} + \left(\vec{R}_\alpha^{\,neid}\right)_z \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

У генералисаним координатама је:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \vec{R}_\alpha^{\,id} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_b} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_b} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\partial f_j}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_b} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_b}$$

након чега се добија (лева страна диф. j-на кретања је иста као и код слободног система)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_b}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_b} = Q_b + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_b} + \sum_{\alpha=1}^{N} \vec{R}_\alpha^{\,neid} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_b}} \qquad (b=1,2,\dots 3N) \quad (**)$$

Ако су реакције идеалне j-не (*) и (**) се зову Лагранжеве j-не прве врсте или Лагранжеве j-не са множитељима веза.

Да би из ових j-на могле да се одреде коначне j-не кретања треба да су познате неидеалне реакције и множитељи веза.

Множитељи веза се одређују из j-на веза

$$f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \quad \text{одн.} \quad \bar{f}_j(q_i, t) = 0$$

а за одређивање неидеалних реакција треба да су познати закони трења. У општем случају неидеалне реакције су функције свих идеалних реакција:

$$\boxed{\vec{R}_\alpha^{\,neid} = -\phi_\alpha\left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_\alpha}, \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \vec{r}_\alpha}, \dots, \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}_k}\right) \frac{\vec{v}_\alpha}{v_\alpha}}$$

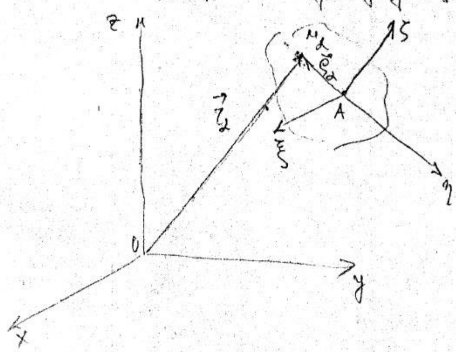
Силе трења (неидеалне реакције) имају увек супротан смер од смера кретања честице.

Према томе да би се саставиле диф. j-не кретања неслободног холономног система треба да су нам познате j-не веза и $\vec{R}_\alpha^{\,neid}$. Поступак је следећи: $\vec{R}_\alpha^{\,neid}$ се убаце у (*) или (**). Затим се j-не везе двапут по времену продиференцирају. У те j-не се убаце компоненте убрзања из (*) или (**). На тај начин се добија систем од k j-на за одређивање k множитеља везе. Кад се они одреде враћају се у (*) или (**) које након тога постају диференцијалне j-не кретања из којих се могу интеграцијом одредити коначне j-не кретања.

Векторски метод у динамици крутог тела

Сопствени систем референције апсолутно крутог тела

К. т. – систем честица чија се међус. растојања не мењају са временом. За свако к. т. могу се дефинисати сопств. систем реф. који се креће заједно са к.т. и у њима координате сваке честице к. т. остају константне у току времена. За координатни почетак се бира једна честица к. т. а за коорд. осе се бирају три ортог. осе према трима одабр. честицама к. т. Избор сопственог сист. реф. није једнозначан



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{r}_\alpha &= x_\alpha \vec{e}_x + y_\alpha \vec{e}_y + z_\alpha \vec{e}_z \\ \vec{\rho}_\alpha &= \xi_\alpha \vec{e}_\xi + \eta_\alpha \vec{e}_\eta + \zeta_\alpha \vec{e}_\zeta\end{aligned}}$$

$\vec{r}_\alpha$ – вектор положаја честице у односу на лабораторијски систем реф.

$\vec{\rho}_\alpha$ – вектор положаја чест. у одн. на сопствени систем реф.

Основна особина апс. крутог тела је тада

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned}\ell^2_{\alpha\beta} &= (x_\beta - x_\alpha)^2 + (y_\beta - y_\alpha)^2 + (z_\beta - z_\alpha)^2 \\ \ell^2_{\alpha\beta} &= (\xi_\beta - \xi_\alpha)^2 + (\eta_\beta - \eta_\alpha)^2 + (\zeta_\beta - \zeta_\alpha)^2\end{aligned}}$$

$\ell_{\alpha\beta}$ је растојање изм. уочених честица α и β које је конст.

ξ_α, η_α и ζ_α су константе а x_α, y_α и z_α су функције времена. Да би се кретање апсолутно крутог тела могло сматрати познатим треба знати положај његовог сопственог система референције у односу на лабораторијски систем референције тј. треба знати:

$$\boxed{\begin{array}{lll} x_A = x_A(t), & y_A = y_A(t), & z_A = z_A(t) \\ \hline \psi = \psi(t), & \theta = \theta(t), & \varphi = \varphi(t)\end{array}}$$

– коначне једначине кретања апсолутно крутог тела

Једначине (*) имају карактер холономних и задржавајућих веза па у том смислу а. к. т. није слободан систем честица. Али ипак ако осим ових јна не постоје и други додатни услови кажемо да круто тело врши слободно кретање тј. $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$ могу имати произвољне вредности.

Кретање крутог тела ће бити неслободно ако координате појединих честица и конст. брзина морају задовољавати и неке друге услове што се одражава и на кретање крутог тела као целине. У том случају кажемо да на а. к. т. дејују везе које су у општем случају описане једначинама везе:

$$\boxed{f(x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi, \dot x_A, \dot y_A, \dot z_A, \dot\psi, \dot\theta, \dot\varphi, t)=0}$$

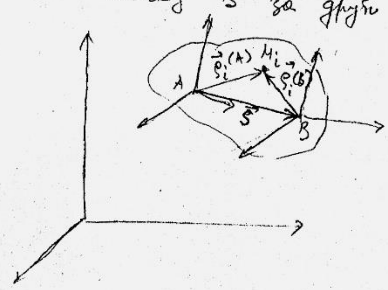
Да би се одредиле коначне ј-не кретања а.к.т. треба саставити 6 диф. ј-на за одређивање $x_A, y_A, z_A, \psi, \theta, \varphi$ које треба да испуњавају основни дин. закон. То нам омогућује теорема импулса и теорема момента импулса.

Брзине и убрзање на које честице а.к.т. у односу на лаб. систем референце дате су једначинама

$$\boxed{\begin{aligned}\vec v_\alpha &= \vec v_A + \vec\omega\times\vec\rho_\alpha\\ \vec a_\alpha &= \vec a_A + \dot{\vec\omega}\times\vec\rho_A + \vec\omega\times(\vec\omega\times\vec\rho_A)\end{aligned}}$$

где је $\vec\omega$ угаона брзина а.к.т.

Показаћемо да угаона брзина а.к.т. не зависи од избора пола сопственог трјеђра. У том циљу посматраћемо а.к.т. и одабраћемо тачку А за један пол и тачку В за други пол сопственог трјеђра.



Без обзира који пол одаберем брзина било које тачке M_i у односу на лабораторијски систем је иста

$$\left.\begin{aligned}\vec v_i &= \vec v_A + \vec\omega_A\times\vec\rho_i^{(A)}\\ \vec v_i &= \vec v_B + \vec\omega_B\times\vec\rho_i^{(B)}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec v_A + \vec\omega_A\times\vec\rho_i^{(A)} = \vec v_B + \vec\omega_B\times\vec\rho_i^{(B)}$$

Пошто је $\vec v_B = \vec v_A + \vec\omega_A\times\vec S$ то је даље

$$\cancel{\vec v_A} + \vec\omega_A\times\vec\rho_i^{(A)} = \cancel{\vec v_A} + \vec\omega_A\times\vec S + \vec\omega_B\times\vec\rho_i^{(B)} \Rightarrow$$

$$\vec\omega_A\times\underbrace{\left[\vec\rho_i^{(A)} - \vec S\right]}_{\vec\rho_i^{(B)}} = \vec\omega_B\times\vec\rho_i^{(B)} \Rightarrow \vec\omega_A\times\vec\rho_i^{(B)} = \vec\omega_B\times\vec\rho_i^{(B)}$$

$$(\vec\omega_A - \vec\omega_B)\times\vec\rho_i^{(B)} = 0$$

Ово се може третирати као услов колинеарности вектора $\vec\omega_A - \vec\omega_B$ и $\vec\rho_i^{(B)}$. Међутим пошто се тачке могу одабрати произвољно $\vec\omega_A - \vec\omega_B$ не може бити колинеарно са свим векторима $\vec\rho_i$ што има за последицу да је $\vec\omega_A - \vec\omega_B = 0$ тј. $\vec\omega_A = \vec\omega_B$.

Размотримо још једном једначину $\vec v = \vec v_A + \vec\omega\times\vec\rho$.

Одговарајуће скаларне једначине гласе:

$v_x = v_{Ax} + \omega_y (z - z_A) - \omega_z (y - y_A)$

$v_y = v_{Ay} + \omega_z (x - x_A) - \omega_x (z - z_A)$

$v_z = v_{Az} + \omega_x (y - y_A) - \omega_y (x - x_A)$

Пошто је пол A исти за све тачке крутог тела, величине $x_A, y_A, z_A, v_{Ax}, v_{Ay}$ и v_{Az} не зависе од координата посматране тачке тако да имамо:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega_z , & \frac{\partial v_x}{\partial z} = \omega_y , & \frac{\partial v_y}{\partial x} = \omega_z \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\omega_x , & \frac{\partial v_z}{\partial x} = -\omega_y & \frac{\partial v_z}{\partial y} = \omega_x \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x , \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 2\omega_y \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega_z \end{array}$$

Изрази на левој страни последњих једначина су компоненте вектора $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ тако да је

$$\boxed{\mathrm{rot}_{\varrho_A} \vec{v} = 2\vec{\omega}}$$

Овде се код образовања ротора диференцира по координатама вектора $\vec{\varrho}_\alpha$. Импулс и момент импулса апсолутно крутог тела у сопственом сист. реф. су једнаки нули

$p^{(A)} = 0 , \quad \vec{L}^{(A)} = 0$

<u>Динамички елементи крутог тела</u>

Динамичко понашање крутог тела окарактерисано је укупном масом

$$\boxed{m = \sum_\alpha m_\alpha}$$

где су m_α масе појединих честица крутог тела. Ова маса је иста и у лаб. систему и у сопств. триједру. Важан је и положај ц. маса

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha} \qquad \boxed{\vec{\varrho}_c = \frac{1}{m} \sum_\alpha m_\alpha \vec{\varrho}_\alpha}$$

у лаб. систему — у сопств. триједру

<u>Тензор инерције</u> - карактерише распоред маса у крутом телу у односу на пол A сопственог триједра и деф. се као

$$\boxed{\mathcal{J}^{(A)} = \left(\sum_\alpha m_\alpha \varrho^2 \right) \mathcal{E} - \sum_\alpha \{ m_\alpha \vec{\varrho}_\alpha , \vec{\varrho}_\alpha \}}$$

$\vec{\varrho}_\alpha$ су вектори положаја појединих честица крутог тела у односу на пол A. Овај тензор је симетричан.

Нека је $\vec{u}$ јединични вектор правца који пролази кроз A. Проанализирајмо скалар $\vec{u}\,\mathcal{J}\,\vec{u}$:

$\vec{u}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{u} = \left(\sum_\alpha m_\alpha \varrho_\alpha^2 \right) \vec{u}\cdot\mathcal{E}\cdot\vec{u} - \sum_\alpha \vec{u}\cdot \{ m_\alpha \vec{\varrho}_\alpha \vec{\varrho}_\alpha \} \vec{u}$

Пошто је $\vec{u}\cdot\mathcal{E}\cdot\vec{u} = 1$ и на основу правила за множење дијадо. $\{\vec{A},\vec{B}\}\cdot\vec{c} = \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{c})$ добија се:

$$\vec{u}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{u} = \sum_\alpha m_\alpha \rho_\alpha^2 - \sum_\alpha m_\alpha(\vec{\rho}_\alpha\cdot\vec{u})^2 = \sum_\alpha m_\alpha\left[\rho_\alpha^2 - (\vec{\rho}_\alpha\cdot\vec{u})^2\right] = \sum_\alpha m_\alpha \rho_{\alpha 1}^2$$

где је $\rho_{\alpha 1}$ растојање честице α од осе одређене јединичним вектором $\vec{u}$. Задњи израз је <u>момент инерције</u> крутог тела у односу на ту осу.

$$\boxed{I_{uu}^{(A)} = \vec{u}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{u}}$$

Производ инерције за две осе које пролазе кроз A чији су јединични вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је

$$\boxed{I_{uv}^{(A)} = \vec{u}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{v}}$$

За њих важи (с обзиром на симетричност тензора) да је $I_{uv}^{(A)} = I_{vu}^{(A)}$.

Ако у A одаберемо један конкретан сопствени триједар коор. оса тензору инерције се може придружити матрица

$$\boxed{\mathcal{J}^{(A)} = \begin{pmatrix} I_{\xi\xi}^{(A)} & I_{\xi\eta}^{(A)} & I_{\xi\zeta}^{(A)} \\ I_{\eta\xi}^{(A)} & I_{\eta\eta}^{(A)} & I_{\eta\zeta}^{(A)} \\ I_{\zeta\xi}^{(A)} & I_{\zeta\eta}^{(A)} & I_{\zeta\zeta}^{(A)} \end{pmatrix}}$$

(дијагонални елементи ове матрице су моменти инерције за координатне осе а недијагонални елементи су производи инерције)

Пошто је $\vec{\rho}_\alpha = \xi_\alpha\vec{e}_\xi + \eta_\alpha\vec{e}_\eta + \zeta_\alpha\vec{e}_\zeta$ то је

$$\boxed{I_{\xi\xi}^{(A)} = \sum_\alpha m_\alpha(\eta_\alpha^2+\zeta_\alpha^2),\quad I_{\eta\eta}^{(A)} = \sum_\alpha m_\alpha(\xi_\alpha^2+\zeta_\alpha^2),\quad I_{\zeta\zeta}^{(A)} = \sum_\alpha m_\alpha(\xi_\alpha^2+\eta_\alpha^2)}$$

$$\boxed{I_{\xi\eta}^{(A)} = I_{\eta\xi}^{(A)} = -\sum_\alpha m_\alpha\xi_\alpha\eta_\alpha,\quad I_{\xi\zeta}^{(A)} = I_{\zeta\xi}^{(A)} = -\sum_\alpha m_\alpha\xi_\alpha\zeta_\alpha,\quad I_{\eta\zeta}^{(A)} = I_{\zeta\eta}^{(A)} = -\sum_\alpha m_\alpha\zeta_\alpha\eta_\alpha}$$

Штајнерова теорема - на вежбама

Тензор инерције ће зависити од избора система (пола A) од расподеле масе крутог тела и његовог облика.

<u>Главне осе инерције</u> - пошто је тензор инерције симетричан он у односу на пол A има три реалне сопствене вредности и три узајамно ортогонална сопствене правца (до дегенерације може доћи ако је круто тело на извесан начин симетрично у односу на одабрани пол A). Ови правци су главне осе инерције. Ако тензору инерције придружимо матрицу приказану у триједру главних оса, инерције добија се дијагонална матрица на чијој су дијагонали <u>главни моменти инерције</u> који

Код континуум. расподеле масе је $I_{xx} = \int_V (y^2+z^2)\,dm$

$$I_{yy} = \int_V (x^2+z^2)\,dm$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2+y^2)\,dm$$

Одавде ⇒ особине:

1° Збир мом. инерције у односу на било које две осе већи је од мом. инерције у одн. на трећу

$$I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} \geq 0 \Rightarrow$$

$$I_{xx} + I_{yy} - I_{zz} = \int_V 2z^2\,dm \geq 0$$

2° Збир мом. ин. тела у односу било које три узајамно ортог. праве је конст. величина која не зависи од оријент. правих

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2\int_V (x^2+y^2+z^2)\,dm = 2\mu$$

поларни момент инерције

Код сим. тензора су све три св. вредности реалне св. правци који одговарају различитим св. вредностима су ортогонални. Ако с. т. прикажемо у триједру св. праваца - дијагонализација матрице. (на главној дијагонали су сопств. вредности). Вишеструкости корена карект. једне доводи код с. т. до обавезне дегенерације (једној св.

представљају моменте инерције у односу на главне осе инерције.

$$\boxed{\mathcal{J}^{(A)} = \begin{pmatrix} I_1^{(A)} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{(A)} & 0 \\ 0 & 0 & I_3^{(A)} \end{pmatrix}}$$

Уколико је пол A центар маса говори се о главним централним осама инерције и главним централним моментима инерције.

Најједноставније је обавити дијагонализацију уколико тело поседује симетрију у расподели маса (материјална симетрија). У таквим случајевима је оса материјалне симетрије главна оса инерције.

Елипсоид инерције

Геометријско место тачака чији вектори положаја $\vec{\rho}$ у односу на пол A задовољавају релацију:

$$\boxed{\vec{\rho} \cdot \mathcal{J}^{(A)} \cdot \vec{\rho} = 1}$$

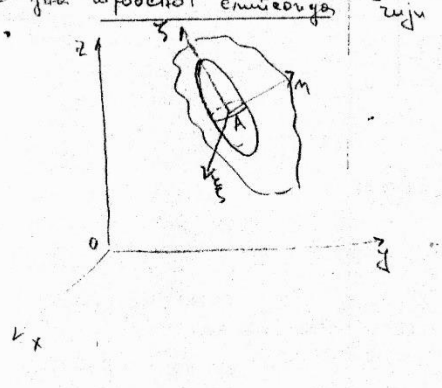
Ова ј-на у матричној форми има облик

$$(\xi\ \eta\ \zeta)\begin{pmatrix} I_1^{(A)} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{(A)} & 0 \\ 0 & 0 & I_3^{(A)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta \\ \zeta\end{pmatrix} = (\xi I_1^{(A)}\ \ \eta I_2^{(A)}\ \ \zeta I_3^{(A)})\begin{pmatrix}\xi \\ \eta \\ \zeta\end{pmatrix} = 1$$

$$I_1^{(A)}\xi^2 + I_2^{(A)}\eta^2 + I_3^{(A)}\zeta^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\xi^2}{\frac{1}{I_1^{(A)}}} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{I_2^{(A)}}} + \frac{\zeta^2}{\frac{1}{I_3^{(A)}}} = 1}$$

на то указује одсуство линеарних чланова у горњој ј-ни. Када $\mathcal{J}^{(A)}$ не би био записан у триједру главних оса инерције у овој ј-ни би се јавили и производи инерције.

Пошто су моменти инерције позитивни бројеви ово је ј-на троосног елипсоида чији је центар у A, чије се осе симетрије поклапају са главним осама инерције крутог тела у односу на A. Уколико је $I_1^{(A)} = I_2^{(A)} \neq I_3^{(A)}$ он дегенерише у ротациони елипсоид а за $I_1^{(A)} = I_2^{(A)} = I_3^{(A)}$ дегенерише у сферу.



Елипсоид инерције даје распоред момената инерције по разним правцима осе ротације у односу на изабрану тачку A.

Ако из пола A повучемо неку праву са јединичним вектором $\vec{n}$ а са s означимо растојање од A до тачке продора ове праве кроз елипсоид. Вектор положаја ове тачке је $\vec{\rho} = s\vec{u}$. Пошто ова тачка лежи на елипсоиду инерције $\vec{\rho}$ треба да задовољава једначину елипсоида инерције.

$$(s\vec{u})\,\mathcal{J}^{(A)}(s\vec{u}) = s^2\,\vec{u}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{u} = 1$$

Пошто је $\vec{u}\cdot\mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{u} = I^{(A)}_{uu}$, то је $I^{(A)}_{uu} = \frac{1}{s^2}$

Одавде је $\boxed{s = \frac{1}{\sqrt{I^{(A)}_{uu}}}}$

Пошто су код троосног елипсоида одсечци полуоса екстремни закључујемо да су главни моменти инерције екстремни.

Импулс и момент импулса крутог тела

Импулс и мом. импулса крутог тела у сопственом систему референције једнаки су нули. У лабораторијском систему референције (уз $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha$ и $\vec{\rho}_c = \frac{1}{m}\sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha$) је:

$$\vec{p}^{(0)} = \sum_\alpha m_\alpha\vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha\vec{v}_A + \sum_\alpha m_\alpha(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha) = m\vec{v}_A + m\vec{\omega}\times\vec{\rho}_c$$

$$\boxed{\vec{p}^{(0)} = m(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_c)} \text{ - импулс к. т.}$$

За момент импулса крутог тела добија се: (уз $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_A + \vec{\rho}_\alpha$)

$$\vec{L}^{(0)} = \sum_\alpha m_\alpha\vec{r}_\alpha\times\vec{v}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_A + \vec{\rho}_\alpha)\times(\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha) =$$

$$= \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha}_{m}\vec{r}_A\times\vec{v}_A + \sum_\alpha m_\alpha\vec{r}_A\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha) + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha}_{m\vec{\rho}_c}\times\vec{v}_A + \sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha) =$$

уз $m\vec{\rho}_c = \sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha$

$$= \underbrace{m\vec{r}_A\times\vec{v}_A + m\vec{r}_A\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_c)}_{m\vec{r}_A\times\underbrace{[\vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_c]}_{\vec{v}_c}} + m\vec{\rho}_c\times\vec{v}_A + \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha)}_{\text{ротациони момент импулса}}$$

уз $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{\rho}_A$ за $\alpha\to c$

$$\vec{L}^{rot} = \sum_\alpha m_\alpha\vec{\rho}_\alpha\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho}_\alpha) = \sum_\alpha m_\alpha[\vec{\omega}\rho_\alpha^2 - \vec{\rho}_\alpha(\vec{\rho}_\alpha\cdot\vec{\omega})] = \Big(\sum_\alpha m_\alpha\rho_\alpha^2\Big)\vec{\omega} -$$

$$- \Big(\sum_\alpha\{m_\alpha\vec{\rho}_\alpha,\vec{\rho}_\alpha\}\Big)\cdot\vec{\omega} = \Big[\Big(\sum_\alpha m_\alpha\rho_\alpha^2\Big)\mathcal{E} - \sum_\alpha\{m_\alpha\vec{\rho}_\alpha,\vec{\rho}_\alpha\}\Big]\cdot\vec{\omega}$$

Пошто је $\vec{\omega} = \mathcal{E}\cdot\vec{\omega}$ и $\mathcal{J}^{(A)} = \Big(\sum_\alpha m_\alpha\rho_\alpha^2\Big)\mathcal{E} - \sum_\alpha\{m_\alpha\vec{\rho}_\alpha,\vec{\rho}_\alpha\}$

за ротациони момент импулса добија се

$$\vec{L}^{rot} = \mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega}$$

тако да је укупни момент импулса крутог тела

$$\boxed{\vec{L}^{(0)} = m\vec{r}_A\times\vec{v}_c + m\vec{\rho}_c\times\vec{v}_A + \mathcal{J}^{(A)}\cdot\vec{\omega}}$$

Drage kolege to je to u ovo vreme burno. Materijal je za predavanja u drugoj nedelji vanrednog stanja zbog pandemije. Šta da vam kažem: ako možete da učite, malo učite, a ako ne, onda bar čitajte. Npr. knjige u oblasti popularne nauke, kakvih danas ima koliko hoćete. I ono što je najvažnije: č u v a j t e se. Znate ono: “ Pre i posle jela treba ruke prati, …”. I ne izlazite, biće vremena i za šetnje i za kafiće, klubove i žurke. Možda vas neće, ali mislite I o drugima. Neću više da vam popujem, pa vi ste već dovoljno matori i logično je da ste svesni.

Pozdravlja vas vaš profa Gaja